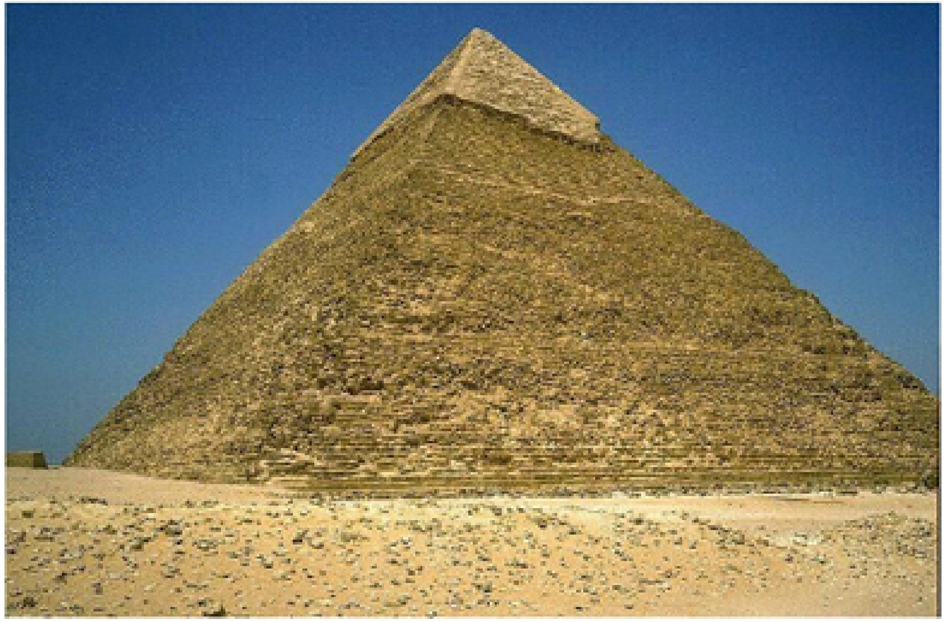
Lectura: LA PIRÁMIDE DE KEOPS

Consideraciones didácticas y soluciones

La pirámide de mayor dimensión de todo el mundo, Keops –o la Gran Pirámide– es la primera y la mayor de las tres grandes pirámides de la Necrópolis de Giza, en las afueras de El Cairo, en Egipto. Fue el edificio más alto (tiene una altura de 145 metros) hasta el siglo XIX, cuando se construyó el primer rascacielos moderno. Lo que la convirtió en una de las Siete Maravillas del Mundo Antiguo fue su constitución: cada una de las piedras usadas para construirla pesa más de dos toneladas. Más de dos millones de esas piedras fueron necesarias para conformar la pirámide.

El Faraón Keops perteneció a la Cuarta Dinastía, alrededor del año 2560 a.C., lo que da como resultado que la pirámide data de hace 4.500 años aproximadamente. Se cree que fue construida, según las costumbres egipcias, para albergar los restos del faraón una vez que éste iniciara su viaje a la nueva vida.



Fuente:www.culturageneral.net/.../piramide_de_keops.htm

Autoría: Juan Emilio García Jiménez & Santiago Turégano Moratalla

El tema de las pirámides nos parece atractivo y motivador para el alumnado y, por ello, nos sirve como excelente punto de partida para estructurar a partir de él todo el estudio del espacio correspondiente al currículo de 4º. Los textos utilizados los hemos tomado de enciclopedias y páginas de Internet. Sería apropiado, si el profesor dispone de tiempo y medios, el utilizar algún vídeo sobre las pirámides de Egipto.

Los contenidos se estructuran en cuatro grandes apartados: forma, medidas de longitud, área y volumen, ángulos y semejanza.

I. Sobre la forma.

■ 1. Teniendo en cuenta el monumento que te planteamos como cuerpo geométrico. Rellena los huecos:

a) ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene?

Caras: 5 Vértices: 5 Aristas: 8

b) La pirámide de Keops es de base cuadrangular. Completa la tabla con el número de caras, vértices y aristas de las diferentes pirámides, según sea el polígono de sus base:

Número de lados de la base	Caras	Vértices	Aristas
3 (Triángulo)	4	4	6
4 (Cuadrado)	5	5	8
5 (Pentágono)	6	6	10
6 (Hexágono)	7	7	12
7 (Heptágono)	8	8	14
8 (Octógono)	9	9	16

c) ¿Cuál sería el numero de caras, vértices y aristas de una pirámide cuyo polígono de la base tiene 100 lados?

Caras: 101 Vértices: 101 Aristas: 202

I. Sobre la forma.

2. Generaliza el resultado para cualquier tipo de pirámide (cuya base es un polígono de n lados). Asocia mediante flechas algunas de las siguientes frases con caras, vértices y aristas:

- El número de lados del polígono de la base más 1 (n + 1).
- El número de lados del polígono de la base (n).
- El doble del número de lados de la base (2n).
- El triple del número de lados de la base (3n).
- El número de lados de la base más 2 (n + 2).

- Número de caras
- Número de vértices
- Número de aristas

Utiliza lo descubierto para comprobar que en cualquier pirámide se cumple ley de Euler para los poliedros:

Ley de Euler: nº de caras + nº de vértices = nº de aristas + 2

Las actividades de este primer bloque dedicado a la forma van encaminadas, en primer lugar, al reconocimiento de las pirámides como cuerpo geométrico (tener idea de la relación de unos elementos con otros, calcular unos a partir de otros). Se trata de conocer (reconocer) mejor los objetos matemáticos, que son el objeto de estudio de esta unidad de trabajo.

El profesor debe observar a los alumnos cuando cuentan y concluir, a partir de cómo lo hagan, su nivel de conocimiento y dominio de las pirámides.

Quizás determinados alumnos necesiten materiales manipulativos. Debemos de pensar que la mayoría de los alumnos de 4º de E.S.O. ya tienen una buena capacidad de abstracción, y además suponemos que estos modelos han sido utilizados en cursos anteriores. Proporcionaremos piezas Polydron^{R} o similares a todos los alumnos que lo necesiten.

La tabla de la actividad 1 contribuye a la formación del alumnado en cuanto a los contenidos actitudinales de ser ordenado y sistemático. La construcción de la tabla ayuda a sistematizar el trabajo, relacionando propiedades que caracterizan a estos cuerpos geométricos, y a obtener resultados generales.

Si han realizado reflexivamente el apartado b, encontrarán bien la respuesta al apartado c y, de algún modo, podrán generalizar para cualquier número de lados de la base. No obstante, en la actividad 2, se ofrecen al alumnado varias respuestas para ayudarle a generalizar y llegar a descubrir de algún modo la ley de Euler. La generalización es el paso obvio en este nivel, los alumnos deberían estar habituados a ello, y constituye una sólida formación hacia la comprensión de las matemáticas. La ayuda a la generalización se produce con la pregunta por un caso alejado 100 lados, una vez resuelto este caso, el paso a la generalización es más sencillo.

La comprobación general de la formula de Euler puede tomarse como un ejemplo de demostración o de la enorme potencia de las matemáticas y el proceso de generalización. De un “plumazo” se ha demostrado que TODAS las pirámides cumplen la ley de Euler para los poliedros, y también constituye un excelente ejercicio algebraico.

Para ampliar sus conocimientos, el profesorado puede remitir a páginas de Internet donde encontrar información sobre las pirámides. Nosotros recomendamos estas:

http://es.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A1mides_de_Egipto

http://www.portalplanetasedna.com.ar/piramides.htm

http://www.cuscoweb.com/7maravillas/1maravilla.htm

La Gran Pirámide es la mayor de las tres que se extienden en la llanura de Giza, cerca del actual El Cairo. Tuvo una altura de 280 codos en su origen. El lado del cuadrado de la base mide 440 codos, eso es casi un cuarto de kilómetro.

En su construcción, se calcula que se emplearon entre 2'3 y 2'5 millones de bloques de piedra, los cuales están tallados con precisión óptica, y oscilan de media entre las 2 y 2'5 toneladas de peso, lo que no quita que también los haya de 60 toneladas. Las juntas entre los bloques son tan exactas que no es posible introducir una hoja de cuchillo entre dos de ellos. En su mayoría se empleó la piedra caliza, pero también el duro granito.

Toda esta mole se asienta sobre una plataforma nivelada artificialmente, con errores mínimos, lo que no deja de constituir un auténtico logro incluso para nuestra época.

II. Medidas: distancias,áreas y volumen.

3. Completa la siguiente tabla rellenando los huecos. Expresa los resultados redondeando a números enteros:

Unidades Egipcias			
Longitudes (codos)			
LADOS	440	ARISTA	418
ALTURA	280	APOTEMA	356
DIAGONAL	622	PERÍMETRO	1.760
Superficie (codos cuadrados)			
ÁREA DE LA BASE		ÁREA DE UNA CARA	
	193.600		78.320
Volumen (codos cúbicos)			
	18.069.333		

Haz clic para utilizar la calculadora.

LADOS: es la longitud de los lados del cuadrado de la base.
ALTURA: se refiere a la altura de la Pirámide.
DIAGONAL: es la diagonal del cuadrado de la base.
ARISTA: se refiere a las cuatro aristas que ascienden hasta el vértice de la pirámide.
APOTEMA: es la altura de las caras triangulares de la pirámide.
PERÍMETRO: se refiere al perímetro de la base.

II. Medidas: distancias,áreas y volumen.

La equivalencia entre la unidad utilizada por los egipcios, el codo real, y el metro es: 1 codo real = 0´523 metros.

- **4. Haz la conversión de la tabla anterior al sistema métrico decimal rellenando los huecos. Expresa los resultados redondeando a números enteros:**

Haz clic para utilizar la calculadora.

Sistema Métrico Decimal			
Longitudes (metros)			
LADOS	230	ARISTA	219
ALTURA	146	APOTEMA	186
DIAGONAL	325	PERÍMETRO	920
Superficie (metros cuadrados)			
ÁREA DE LA BASE		ÁREA DE UNA CARA	
	52.955		21.423
Volumen (metros cúbicos)			
	2.584.920		

Con respecto a sus peculiaridades matemáticas, ya en el siglo V a.C., Herodoto afirma en uno de sus textos que los sacerdotes egipcios le habían mostrado que el cuadrado de la altura total de la pirámide de Keops era igual al área de una cara. Rellena los huecos:

Cuadrado de la altura:	78.400	m.
Área de una cara:	78.320	$m.^2$
¿Tenían razón los sacerdotes egipcios?	si	

Las actividades propuestas en este último apartado (medidas) sirven para poner en juego los conocimientos aprendidos sobre hipotenusas, diagonales, triángulos y áreas.

Nos parece importante trabajar con unidades no habituales (codos reales) porque nos sitúa en la perspectiva histórica de las unidades de medida, calculando con las que realmente utilizaron los constructores de las pirámides. El devenir de las unidades de medida a lo largo de la historia resulta muy ilustrativo para apreciar el valor del sistema métrico decimal y nos ayuda a fortalecer entre el alumnado la idea de que la unidad de medida es arbitraria.

En este momento es muy importante tener en cuenta el redondeo y la transmisión de errores en los cálculos. Se han usado para los cálculos los valores redondeados, no obstante, nos parece más adecuado, ya que el alumno utilizará la calculadora, que se acostumbre a presentar los resultados como redondeos, pero que en los resultados intermedios utilice los valores exactos. Por tanto, todos los resultados de este apartado se consideraran buenos con un cierto grado de aproximación.

Es interesante incluir el problema que plantea Herodoto, relativo a la comparación entre dos figuras aparentemente tan diferentes como un cuadrado (cuadrado de la altura) y el triángulo de la cara, que presentan superficies equivalentes con un cierto grado de aproximación. Esto es “cuadrar las figuras”.

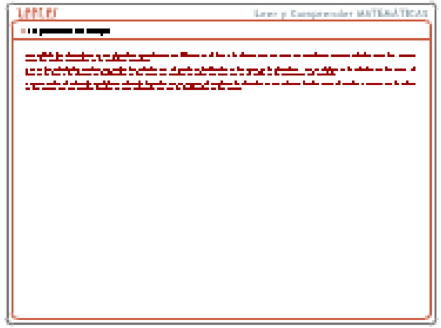
Para definir las dimensiones de una pirámide, normalmente nos fijamos en el lado y la altura, pues con estas dos magnitudes podemos calcular todas las demás, como has podido comprobar en la actividad anterior.

Una de las principales medidas que usaban los egipcios era el ángulo de inclinación de las caras de la pirámide, que se obtiene de la relación que hay entre el lado de la base y la altura. La inclinación de las caras era medida en Seked (un dato que es el doble de la cotangente del ángulo).

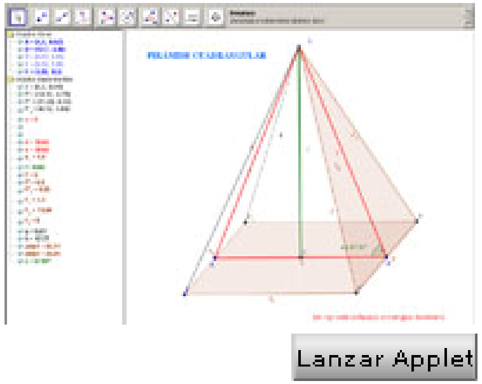
Veamos usaban el triangulo meridiano, triangulo isósceles que se produce al seccionar la pirámide en dos mitades iguales desde el vértice y pasando por la mitad de las caras. Los dos ángulos iguales de este triángulo nos dan la inclinación de las caras.

III. Ángulos. Inclinación.

5. Primero te vamos a plantear que resuelvas el Problema 56 del papiro Rhind. Pregunta el escriba Ahmes: "Si una pirámide tiene una altura de 250 codos, y el lado de su base mide 360 codos, ¿cuál es su Seked?"



Seked: 54º 14' 46''



Haz clic para utilizar la calculadora.

Utiliza la calculadora para medir el ángulo de inclinación de las siguientes pirámides de Egipto:

La medida de los ángulos se debe redondear a minutos.

Pirámide	Lado (codos)	Altura (codos)	Ángulo
Seneferu	420	196	43º 1'
Jufu (Keops)	440	280	51º 51'
Jafra (Kefrén)	410	273'3	53º 8'
Isesi	150	100	53º 8'

Nosotros hemos hecho la equivalencia entre el seked que utilizaban los egipcios y lo que nosotros utilizamos como ángulo de inclinación. Para ellos, el Seked era el cociente entre el lado y la altura "expresado en diferentes unidades".

El cálculo del ángulo de inclinación es sencillo usando la tangente del ángulo que ya debes de conocer:

$$tag \quad \alpha = \frac{250}{180} \Rightarrow \alpha = tag^{-1}\frac{25}{18} = 54º14´46´´$$

La utilización de la trigonometría para el calculo de ángulos y la resolución de triángulos, "medir sin hacer medidas directamente", es uno de los objetivos básicos del bloque de geometría en 4º E.S.O. La resolución de un triangulo isósceles y el calculo de sus ángulos iguales no debería de presentar mucha dificultad. El uso de la calculadora agiliza estos cálculos y permite una desmedida precisión. Sería interesante discutir que no es necesaria tanta precisión, si los datos de los lados pueden tener errores de incluso unidades, no deberíamos presentar los resultados de los ángulos con la precisión de segundos, por mucho que nuestra calculadora nos lo muestre.

En la respuesta anterior se da un resultado demasiado exacto o con exceso de precisión. Para este caso, nos parece razonable dar la medida sólo en grados (54º, o si acaso 54º 15'). Esto mismo vale para todas las medidas obtenidas por las actividades de este apartado.

Pirámide del Louvre.

Esta Pirámide de cristal, inaugurada en 1989, es obra del arquitecto estadounidense de origen chino Leoh Ming Pei. La pirámide tiene 666 rombos de vidrio y ocupa 1.250 metros cuadrados, 35'4 metros de largo y 21'65 metros de altura. Su construcción fue una conmoción ciudadana, al igual que la del Centro Pompidou. Ahora, esa pirámide, además de práctica, a todo el mundo nos parece bonita y adecuada.

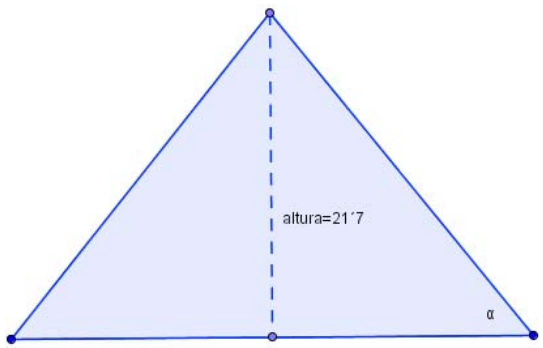
Fuente:http://es.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A1mide_del_Museo_del_Louvre

6. Comprueba que la pirámide del Louvre tiene prácticamente la misma inclinación que la gran pirámide de Keops.

Inclinación de la pirámide de Keops	51º 50'
Inclinación de la pirámide del Louvre	51º 07'

Para calcular la inclinación de la pirámide hemos utilizado el triángulo medial, triangulo isósceles que resulta de seccionar la pirámide en dos trozos iguales pasando por la mitad de las caras.

En el caso de la pirámide del Louvre el triangulo medial es el que aparece en la figura:



Los catetos de los triángulos rectángulos en que queda dividido este triangulo por su altura miden:
b= 21´7 m
c= 35/2=17,5 m

$$tag \quad \alpha = \frac{21'7}{17'5} \Rightarrow \alpha = tag^{-1}\, 1'24 = 51^{\circ}7'$$

Inclinación de la pirámide de Keops: **51º 50´**
Inclinación de la pirámide del Louvre: **51º 07´**

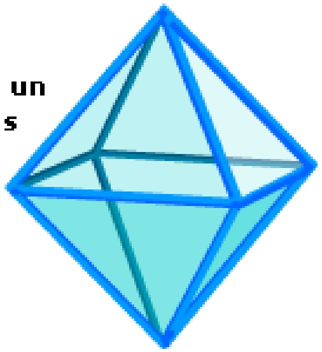
La atracción del mundo de las pirámides resulta tan poderosa que cuando se acomete la reforma de una gran obra civil, como es el museo del Louvre, uno de los mejores arquitectos del momento pensó en una réplica de la Gran Pirámide o pirámide de Keops. Esto nos brinda un sorprendente recordatorio de la audacia y habilidad de la arquitectura moderna para poner en valor las formas arquitectónicas tradicionales.

IV. Semejanza.

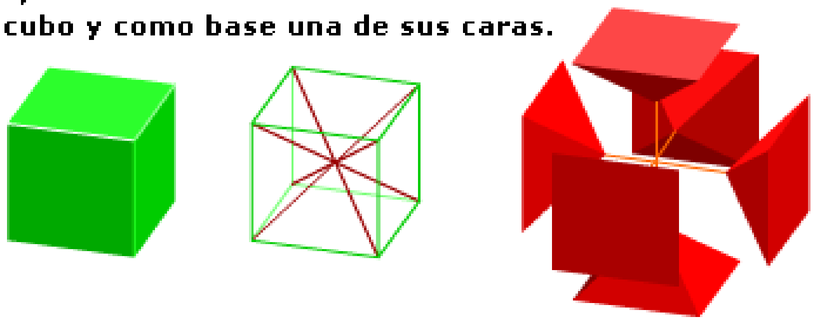
Con el ángulo de inclinación se puede definir una pirámide que sea igual en forma, aunque no necesariamente en tamaño, que otra dada. Es decir, dos pirámides regulares, de cuatro lados cada una, que tengan el mismo ángulo de inclinación de caras, serán iguales en forma o aspecto, aunque pueden tener tamaños diferentes y, en este caso, se dice que una de las pirámides está realizada a escala de la otra. Esta relación o escala entre ellas es la razón de semejanza.

Podemos encontrar dos pirámides de base cuadrada en los poliedros regulares.

La primera es la mitad de un octaedro. En este caso, las caras laterales son triángulos equiláteros.



La segunda es la sexta parte de un cubo, utilizando como vértice el centro del cubo y como base una de sus caras.



■ 7. Completa las tablas siguientes:

a) Comprueba si estas pirámides tienen las mismas proporciones que la Gran Pirámide. Utiliza para ello el cálculo del ángulo de inclinación:

Inclinación de las pirámides	Ángulo
Seneferu	51º 50´
Jufu (Keops)	51º 07´
Jafra (Kefrén)	45º
Isesi	54º 44'

b) Comprueba si las siguientes pirámides guardan la misma proporción:

Pirámide	Lado (codos)	Altura (codos)	Ángulo
Huni	275	175	51º 50´
Niuserra	150	95.45	51º 50´

Autoría: Juan Emilio García Jiménez & Santiago Turégano Moratalla

La inclinación de la pirámide obtenida a partir del cubo es sencilla de calcular, ya que la altura es la mitad del lado, por tanto:

$$tag \quad \alpha = \frac{0´5\,l}{0´5\,l} \Rightarrow \alpha = tag^{-1}\,1 = 45º$$

La inclinación de la pirámide obtenida a partir de medio octaedro es más difícil de calcular y hemos de tener en cuenta el hecho de que sus caras laterales son triángulos equiláteros. Si tomamos un octaedro de lado 1 por comodidad y porque el tamaño no afecta a los ángulos, entonces sabemos que la altura de los triángulos equiláteros que forman las caras es: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sabiendo este dato puedo usar en el triangulo medial:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

y entonces $\alpha = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 54º44´8´´$

NO. Ninguna de ellas tiene la misma inclinación que la Gran Pirámide. La pirámide obtenida del cubo es menos inclinada y la del octaedro (o pirámide de caras triángulos equiláteros) es un poco mas inclinada.

IV. Semejanza.

8. Señala cuál será la relación de semejanza entre estas dos pirámides, las cuales guardan la misma proporción:

Pirámide	Lado (codos)	Altura (codos)	Ángulo
Huni	275	175	51º 50'
Niuserra	150	95.45	51º 50'

- 1 / 4
- ✓ 6 / 11
- 4 / 7
- 1 / 2

IV. Semejanza.

9. ¿Cual será la relación entre la superficie de las bases?

Señala si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

Pirámide	Lado (codos)	Altura (codos)	Ángulo
Huni	275	175	51º 50'
Niuserra	150	95.45	51º 50'

La misma relación de semejanza. V F ✓

El doble de la relación de semejanza. V F ✓

El cuadrado de la relación de semejanza. V ✓ F

IV. Semejanza.

10. Queremos construir una reproducción de la Gran Pirámide y para ello utilizamos la escala 1:500.

Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será el volumen de nuestra reproducción? 20,7 dm3

b) ¿Qué relación presenta con el original? 1/125.000.000

El estudio de la semejanza de las relaciones de proporcionalidad entre figuras es también un tema básico de este curso y de las matemáticas en general.

De la idea de que las figuras semejantes conservan los ángulos, podemos razonar que dos pirámides cuadrangulares son semejantes si presentan la misma inclinación. Por eso, planteamos un estudio de varios tipos de pirámides y se pregunta si estas pirámides son semejantes o no.

La relación de proporcionalidad no es más que la relación entre sus lados, cualquier superficie se transforma según el cuadrado de la relación de proporcionalidad. Es posible actuar a la inversa: calcular las dimensiones de la figura proporcional y después estudiar las áreas para comprobar que guardan una relación igual al cuadrado de la relación de proporcionalidad.

La relación entre volúmenes es el cubo de la relación de proporcionalidad.