

Lectura: LA MAGÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Consideraciones didácticas y soluciones

Los números primos, y todo lo que a partir de ahí comienza en torno a la divisibilidad, constituyen un tema de formación básica al inicio de la E.S.O. y, por la propia naturaleza de estos números, despiertan un interés muy grande a lo largo de todos los tiempos. En el momento presente, disponemos de numerosas publicaciones sobre

el tema, prueba del interés que despierta. Estas publicaciones son asequibles a nuestros estudiantes de Secundaria y nos pueden servir de elemento motivador para educar la comprensión lectora y para mejorar la competencia matemática.

1º E.S.O.**Cantidad**

El matemático Marcus du Sautoy (Londres, 1965) juega de medio, con el 17 a la espalda, en un equipo de fútbol de aficionados al este de la capital británica. Como él, todos sus compañeros lucen dorsales con números primos, unas cifras singulares e indivisibles, excepto entre sí mismas y entre uno, y que traen de cabeza a los matemáticos desde hace dos mil años. Ni los mejores campeones aritméticos han conseguido descifrar qué pauta rige la serie que empieza 2, 3, 5, 7...

El País (Abel Grau, Barcelona, 6/04/2007).



- 1. Señala qué jugadores de la Selección Española que ganó la Eurocopa 2008 podrían formar parte del equipo de Marcos du Sautoy porque llevan números primos en el dorsal de su camiseta.



Fotografía: <http://www.rfef.es/>

- | | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|------------|
| <input type="checkbox"/> | 1 | Íker Casillas | ✓ | <input type="checkbox"/> | 13 | Palop | |
| ✓ | <input type="checkbox"/> | 2 | Albiol | <input type="checkbox"/> | 14 | Xavi Alonso | |
| ✓ | <input type="checkbox"/> | 3 | Fernando Navarro | <input type="checkbox"/> | 15 | Sergio Ramos | |
| <input type="checkbox"/> | 4 | Marchena | <input type="checkbox"/> | 16 | Sergio García | | |
| ✓ | <input type="checkbox"/> | 5 | Puyol | ✓ | <input type="checkbox"/> | 17 | Dani Güiza |
| <input type="checkbox"/> | 6 | Iniesta | <input type="checkbox"/> | 18 | Arbeloa | | |
| ✓ | <input type="checkbox"/> | 7 | Villa | ✓ | <input type="checkbox"/> | 19 | Senna |
| <input type="checkbox"/> | 8 | Xavi | <input type="checkbox"/> | 20 | Juanito | | |
| <input type="checkbox"/> | 9 | Fernando Torres | <input type="checkbox"/> | 21 | Silva | | |
| <input type="checkbox"/> | 10 | Cesc Fábregas | <input type="checkbox"/> | 22 | De la Red | | |
| ✓ | <input type="checkbox"/> | 11 | Capdevila | ✓ | <input type="checkbox"/> | 23 | Reina |
| <input type="checkbox"/> | 12 | Cazorla | | | | | |

Desarrollo de la actividad

Esta primera actividad nos sirve de motivación, enlazando la afición natural por el fútbol con una noticia de prensa que nos habla de un señor al que le gusta tanto el fútbol como los números, y, en particular, los números primos.

El texto de “El tío Petros y la conjetura de Goldbach” nos sitúa en la idea de lo que son los números primos y la de su infinitud, un misterio que ha interesado e interesa. Fomentar la “afición por los números” es uno de nuestros principales retos como docentes.

- "He aquí el problema... supongo que ya sabrás algo sobre números primos, ¿no?"
- ¡Desde luego, tío! Un número primo es un entero mayor que 1 que no tiene divisores aparte de él mismo y de la unidad. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13 y así sucesivamente. Parecía satisfecho con la exactitud de mi definición.
- Estupendo. Ahora dime, ¿cuántos números primos hay?"

Apostolos Dioxiadis. El tío Petros y la conjetura de Goldbach.

■ 2. Señala si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

Los números acabados en 0 son primos.	V <input type="radio"/>	F <input checked="" type="radio"/>
Los números pares, excepto el 2 no son primos.	V <input checked="" type="radio"/>	F <input type="radio"/>
Todos los números impares son primos.	V <input type="radio"/>	F <input checked="" type="radio"/>
Los números impares de dos cifras acabados en 5 no son primos.	V <input checked="" type="radio"/>	F <input type="radio"/>
Ningún número par de dos cifras es primo.	V <input checked="" type="radio"/>	F <input type="radio"/>
El único número par y primo es el 2.	V <input checked="" type="radio"/>	F <input type="radio"/>
Todos los números que acaban en 1 son primos.	V <input type="radio"/>	F <input checked="" type="radio"/>
Todos los números primos de más de dos cifras tienen que acabar en 1, 3, 7 ó 9.	V <input type="radio"/>	F <input checked="" type="radio"/>

Esta cuestión se propone con la intención de que sirva para delimitar conceptualmente la idea de lo que es y lo que no es un número primo. En la puesta en común, las afirmaciones se deberían tratar por separado y unas en relación con otras, exigiendo a los alumnos argumentos

razonados de la certeza o falsedad de cada frase. La expresión oral y el contraste de pareceres ayudan a profundizar en el concepto de número primo.

La búsqueda de modelos.

"La aventura de la búsqueda de los números primos por parte de los matemáticos está perfectamente expresada en uno de los problemas que todos hemos resuelto en la escuela: dada una sucesión de números, determinar el siguiente elemento. Veamos a título de ejemplo tres de estos problemas:

1, 3, 6, 10, 15

1, 1, 2, 3, 8, 13

1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22.....

Muchas preguntas asaltan la mente matemática ante listas así: ¿cuál es la regla que está detrás de cada sucesión? ¿Es posible predecir el siguiente elemento? ¿Se puede determinar una fórmula que nos permita calcular el centésimo término de la sucesión sin que sea necesario calcular los 99 anteriores?"

Marcus du Sautoy. La búsqueda de modelos. "La música de los números primos".

■ 3. Rellena los huecos con los números que correspondan:

a) Escribe los 3 números siguientes de esta serie: 1,3,5,7...

b) Intenta encontrar directamente el término número 100 sin tener que calcular antes los 99 primeros.

Término 100:

c) Esta serie es un poco más difícil, trata de concentrar tu atención. Escribe los tres términos siguientes sabiendo que se encuentran entre: 21, 34, 55, 18, 20 y 37.

d) Rellena esta tabla con los diez primeros números primos:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="7"/>	<input type="text" value="11"/>	<input type="text" value="13"/>	<input type="text" value="17"/>	<input type="text" value="19"/>	<input type="text" value="23"/>	<input type="text" value="29"/>

La búsqueda de modelos es una de las actividades que están en la esencia del pensamiento matemático. Siempre que tenemos una serie deseamos saber la pauta que la rige, conocer cualquier término por lejano que sea sin tener que haber obtenido antes todos los anteriores. El paso de la aritmética al álgebra, la abstracción como facultad a educar desde las matemáticas, tiene en estas actividades un lugar apropiado de desarrollo.

Se ha establecido una secuencia de actividades que va desde las series que ya conocían, pasando por otras donde resulta asequible buscar pautas, a las que vienen

en el texto de Sautoy, y concluyendo con la de los números primos. Es este sin duda, uno de los buenos problemas matemáticos todavía sin resolver, y sería deseable plantearlo a los alumnos como la idea de que en matemáticas no está todo acabado, que nos quedan muchos y buenos problemas por resolver.

Esta es también una buena ocasión para utilizar el recurso de la Historia de las Matemáticas, pidiendo a los alumnos individualmente o por grupos que elaboren un informe sobre Eratóstenes y la matemática de su tiempo.

Primos con nombres y apellidos.

"Sophie Germain, hija de un rico banquero y nacida en París en 1776 descubrió algunas cosas interesantes sobre los números primos. Los padres escondían los libros de matemática porque compartían el punto de vista de la clase media de la época, que decía que las jóvenes no debían molestarse en saber matemáticas. Sophie Germain encontró los libros y los devoró lejos de las miradas de desaprobación, en la mitad de la noche. Cuando los padres la descubrieron, tomaron decisiones extremas para frustrar la afición de su hija. Una vez acostada, le retiraban la ropa, y toda fuente de luz o calor, por lo que no podría levantarse de la cama a buscar los libros. Pero consiguió su propósito gracias a un secreto surtido de velas. En la literatura matemática, a esos primos que tienen la propiedad de que cuando se les multiplica por dos y se les suma uno se obtiene otro primo, se les llama primos de Sophie Germain. El primero de los primos Sophie Germain es 2, porque $2 \times 2 + 1$ es 5, que es primo. El mayor de los primos Sophie Germain conocidos se descubrió el 19 de enero de 1998, y tiene 5.122 dígitos. Aún no se sabe si la cantidad de primos Sophie Germain es infinita, como los primos mismos".

Paul Hoffman. El hombre que sólo amaba los números. Ed. Gránica.

- 4. Si el primer número primo de Sophie Germain es el 2, marca los cinco siguientes:

5 ✓ 7 ✓ 11 17 13 19 ✓ 23
 29 31 37 41 ✓ 47 53 ✓ 59

El mundo de los números primos es fuente inagotable de buenas oportunidades para favorecer la afición por los números y, por ende, por las matemáticas. Por su facilidad de comprensión, se han propuesto en esta actividad los primos de Sophie Germain, pero si el profesorado encuentra un buen curso, bien podría comentar también los primos de Mersenne y otros casos particulares.

Especial atención merece el papel de las mujeres en la Historia de las Matemáticas, y las enormes dificultades que han debido de afrontar para dedicarse al cultivo de la matemática. Un trabajo sobre esta gran mujer nos serviría para tratar en clase la educación en valores y en especial el de la igualdad de oportunidades entre ambos sexos.

Primos y compuestos.

"Los números primos son como átomos. Son los bloques con que están contruidos todos los enteros. Cada entero es un primo o es el producto entre números primos. Por ejemplo, el 11 es primo; 12 es el producto de los primos $2 \times 2 \times 3$; 13 es primo; 14 es el producto de 2×7 , dos primos; 15 es también el producto de dos primos, 3×5 , y así con todos los enteros. Hace unos 2.300 años, en la proposición 20 del Libro IX de los Elementos, Euclídes dio una demostración de que los primos son infinitos".

Paul Hoffman. El hombre que sólo amaba los números. Ed. Gránica.

Como ves todo número par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos primos. Esto lo conjeturó Cristian Goldbach en 1.742 y aún no se ha demostrado, pero funciona. Ejemplos:

$4 = 2 + 2$	$6 = 3 + 3$	$8 = 5 + 3$
$10 = 7 + 3; 10 = 5 + 5$	$12 = 7 + 5$	$14 = 11 + 3; 14 = 7 + 7$

- 5. Expresa como suma de dos números primos, los números pares siguientes:

$$28 = \boxed{23} + \boxed{5}$$

$$30 = \boxed{23} + \boxed{7}$$

$$32 = \boxed{19} + \boxed{13}$$

$$34 = \boxed{17} + \boxed{17}$$

$$36 = \boxed{23} + \boxed{13}$$

Primos y compuestos.

"Yo dije que no era listo, tan sólo advertía cómo son como son las cosas, y eso no es ser listo. Sólo es ser observador. Ser listo es ver cómo son las cosas y utilizar la información para deducir algo nuevo. Como que el universo está en expansión o que alguien ha cometido un asesinato. O cuando uno ve el nombre de alguien y le da un valor a cada letra desde el 1 al 26 (a = 1, b = 2, etc.) y suma los números en la cabeza y descubre que dan un número primo, como Scooby Doo (113), o Sherlock Holmes (163) o Doctor Watson (167)".

Mark Haddon. El curioso incidente del perro a medianoche.

- 6. Teniendo en cuenta el texto anterior y la siguiente tabla de valores, calcula:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

- a) La suma de los valores de las distintas cifras de los nombres de Scooby Doo, Sherlock Holmes y el Doctor Watson. El resultado tiene que ser un número primo:

S	C	O	O	B	Y		D	O	O	113
---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	-----

S	H	E	R	L	O	C	K		H	O	L	M	E	S	163
---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	-----

D	O	C	T	O	R		W	A	T	S	O	N	167
---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	-----

- b) Suma los números en la cabeza, como el personaje del libro, y averigua si Marc Gasol y Pau Gasol, son, además de hermanos, "primos", en el sentido de que la suma de los valores de las letras de sus nombres den como resultado números primos.

P	A	U		G	A	S	O	L	89
---	---	---	--	---	---	---	---	---	----

M	A	R	C		G	A	S	O	L	92
---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	----

Esta actividad sobre primos y compuestos plantea en enunciado uno de los problemas abiertos más antiguos en matemáticas (la conjetura de Godbach), cuyo enunciado es el siguiente: “*Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos*”.

Las actividades sobre los personajes de novela y deportistas nos proporcionan una buena ocasión de trabajar en el aula la elaboración y utilización de

estrategias personales para el cálculo mental y para el cálculo aproximado. Debe pedirse que hagan mentalmente los cálculos para obtener el valor de las letras de cada nombre y que expliquen en clase cómo lo han hecho. El sentido numérico o cálculo inteligente centra su atención en el proceso, en la utilización adecuada del sistema de numeración decimal y las propiedades de las operaciones para facilitar los cálculos.

Múltiplos y divisores.

Si tomamos un número cualquiera, por ejemplo el 7, y lo vamos multiplicando por 1,2,3,4,... obtenemos la sucesión 7,14,21,28,... Todos estos números son múltiplos de 7.

■ 7. Podemos decir que un número "a" es múltiplo de otro "b" cuando...

Marca la o las respuestas correctas.

- "b" contiene un número exacto de veces a "a".
- ✓ En "a" podemos formar un número determinado de grupos de "b".
- ✓ "a" es varias veces mayor que "b".
- ✓ "a" contiene un número exacto de veces a "b".

Múltiplos y divisores.

- 8. Los divisores de 216 (sin contar el 216) son estos: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54 y 118. Como ves, en el cuadrado mágico se han puesto dos de ellos (6 y 36). Elige otros 7 para completar el cuadrado mágico, sin repetir ninguno, de tal manera que el producto de tres números en filas, columnas o diagonales sea siempre 216.

18	4	3
1	6	36
12	9	2

Las actividades propuestas en este apartado tienen la intención de favorecer la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor, como dos facetas íntimamente relacionadas de los números. El procedimiento seguido es de inducción: obtener múltiplos, obtener divisores y relacionar de diversas formas la relación múltiplo/divisor. Se concluye con una actividad de tipo lúdico (el cuadrado mágico) donde poner en juego los divisores de un número.

Números amigos, perfectos, abundantes y deficientes.

"Mira qué maravillosa sucesión de números. La suma de los divisores del 220 es igual a 284. Y la de los divisores de 284, igual a 220. Son números amigos. Son una combinación muy infrecuente, ¿sabes? Fermat o Descartes sólo lograron descubrir un par cada uno de ellos. ¿No te parece hermoso que la fecha de tu cumpleaños y el número grabado en mi reloj de pulsera estén unidos por un lazo tan maravilloso...?"

Yoko Ogawa. La fórmula preferida del profesor. Ed. Funambulista.

■ 9. Completa los huecos:

a) Rellena con los divisores de 220:

1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110

b) Rellena con los divisores de 284:

1 2 4 71 142

c) La suma de los divisores de 220 es: 284

d) La suma de los divisores de 284 es: 220

e) ¿Son amigos? si

Números amigos, perfectos, abundantes y deficientes.

"- El número perfecto más pequeño es el 6 porque $6=1+2+3$.

- Ah, es verdad. Así que no es nada extraordinario.

- Sí, qué va, al contrario. Es un número maravilloso que encarna verdaderamente el significado de "perfecto".

- Naturalmente, excepto en los números perfectos, la suma de los divisores de un número, o bien lo supera o bien es inferior a él. Cuando lo supera se llama número abundante, y cuando es inferior, se llama deficiente.

¿No te parece en verdad que son apelativos muy claros?"

Yoko Ogawa. La fórmula preferida del profesor. Ed. Funambulista.

- 10. Debes obtener los divisores de estos números y después elegir en el desplegable correspondiente el tipo de número que es (perfecto, abundante o deficiente):

14	Deficientes	16	Deficientes
18	Abundantes	21	Deficientes
24	Abundantes	25	Deficientes
28	Perfectos	30	Abundantes
32	Deficientes	40	Abundantes

Máximo común divisor.**11. Completa las tablas siguientes:**

a) Halla los divisores comunes al siguiente grupo de números y luego escribe el mayor de ellos:

Números	Divisores comunes				El mayor es...
14, 42 y 56	1	2	3	7	7

b) Escribe los factores comunes y el m.c.d. de la siguiente pareja de números:

Números	Factores comunes					m.c.d.
150 y 250	1	2	5	25	50	50

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

En un viaje por La Mancha, Alicia ha ido a comprar vino para regalar a sus tíos. Las botellas que ha comprado pueden colocárselas en cajas de 12 o de 18 botellas.



■ 12. Responde a la pregunta y completa las tablas:

a) ¿Cuál crees que puede ser el menor número de botellas que ha podido comprar?

b) Completa las tablas:

Fuente: http://www.laregioninternacional.com/resize.php?pic=imagenes/elementos/999_actualidad.jpg&tipo=350

m.c.m.	5	9	12	36
5	<input type="text" value="5"/>	45	60	<input type="text" value="180"/>
9	<input type="text" value="36"/>	9	<input type="text" value="45"/>	36
12	60	<input type="text" value="36"/>	12	<input type="text" value="36"/>
36	<input type="text" value="180"/>	36	<input type="text" value="36"/>	36

m.c.d.	32	45	120	180
32	32	<input type="text" value="1"/>	8	<input type="text" value="4"/>
45	<input type="text" value="1"/>	45	5	45
120	8	<input type="text" value="15"/>	120	<input type="text" value="60"/>
180	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="45"/>	60	180

Los últimos apartados de esta propuesta didáctica están dedicados a los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, desde un enfoque que apuesta por la inducción como metodología para ir adquiriendo y consolidando los conceptos. Todos los conceptos estudiados se ponen en juego a la hora de realizar las actividades propuestas: números primos y compuestos, múltiplos y divisores, factores primos, etc. La idea de

que el máximo común divisor se obtiene una vez descompuesto un número en factores primos, tomar los comunes con el menor exponente y, para el caso del mínimo común múltiplo, el tomar los comunes con el mayor exponente y los no comunes, debe partir de la observación por el alumnado de muchos casos particulares.