

### 3º E.S.O.

### Incertidumbre

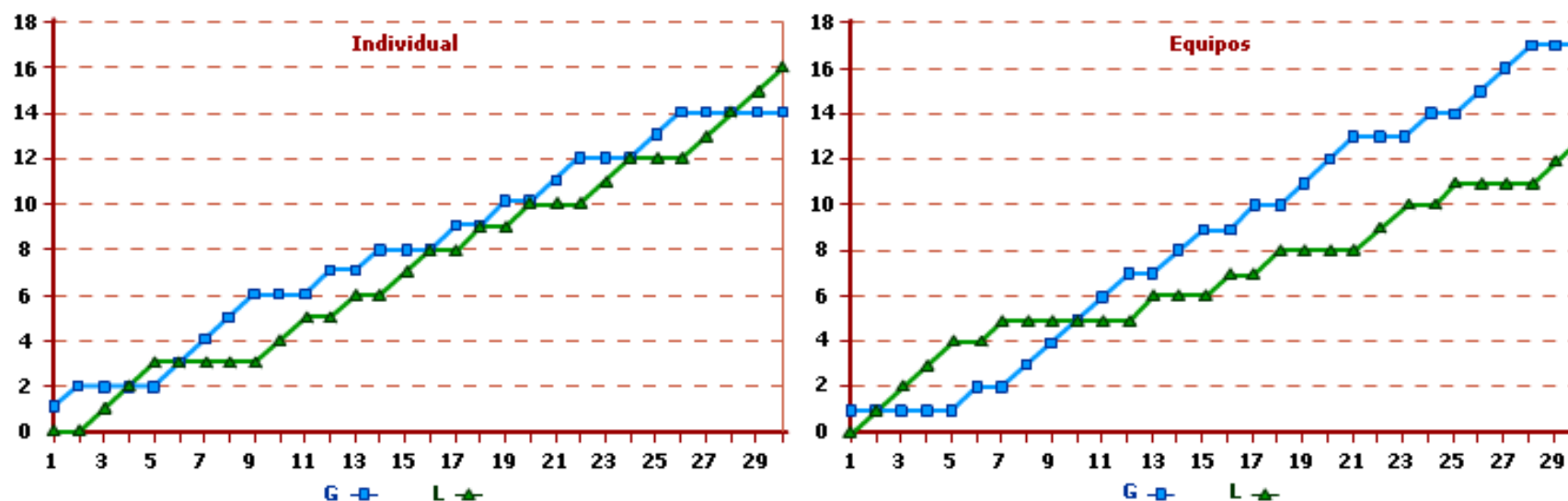
## Lectura: COMPETICIONES

**Contar bien no es fácil. La historia de los centros educativos suele contener datos sobre los logros deportivos de los alumnos del centro. Se registra lo que ha ocurrido cada año y se tiene en cuenta en los comentarios previos a cada nuevo encuentro.**

Nos fijamos en la prueba de carrera de 100 metros masculinos que celebran los centros Gaia (G) y Leonardo (L). Tiene una clasificación individual, en la que gana el centro del participante que llega primero, y otra clasificación por equipos. Para la clasificación por equipos se asignan puntos según el puesto de la carrera hasta el 4º clasificado según la tabla:

Clasificación	1º	2º	3º	4º
Puntos	8	5	3	1

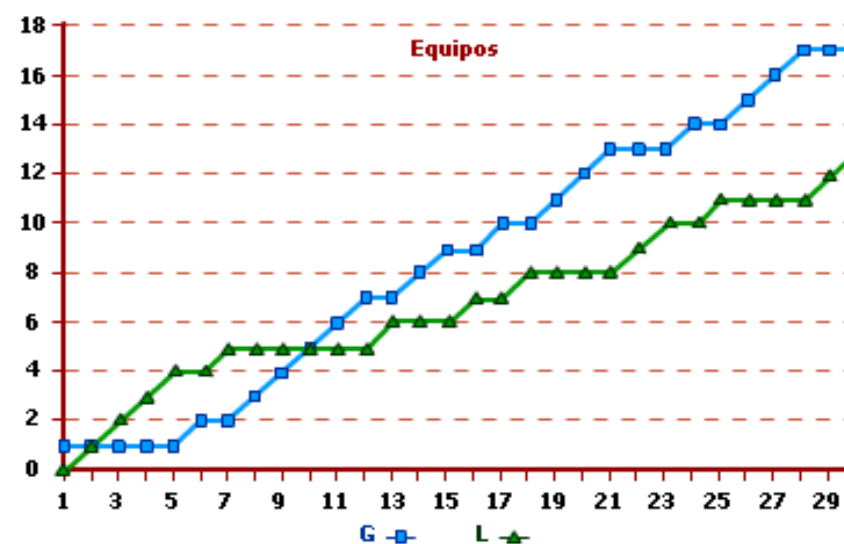
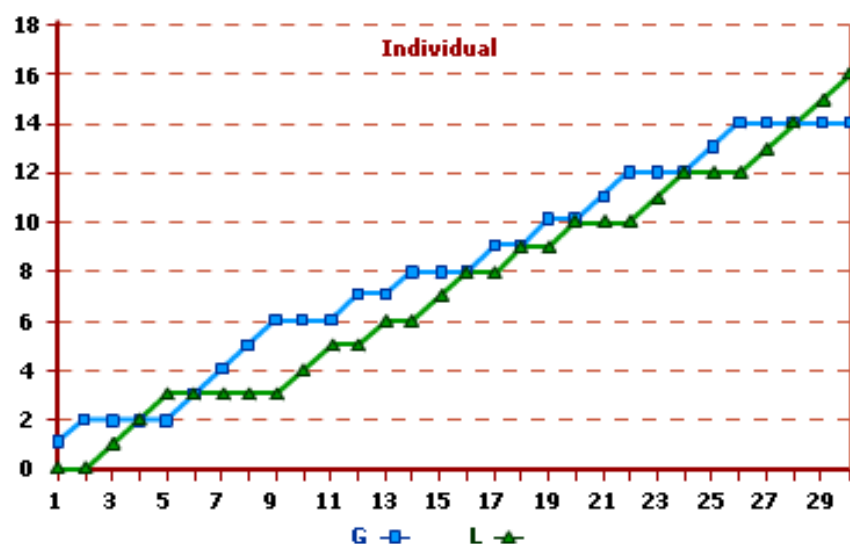
Las gráficas del centro que ha ganado cada año la prueba individual y la prueba por equipos y las veces que ha ganado durante los últimos 30 años son:



Para hacer las gráficas de cada una de las competiciones, se ha asignado al centro que gana cada año 1 punto, y al que pierde, 0 puntos. El último año ganó la prueba individual un estudiante del Leonardo. Este centro ganó también la prueba por equipos.

Desde el primer año, cada centro selecciona a tres alumnos para la carrera masculina de 100 metros. Este año, Gaia ha seleccionado a Antonio, Basilio y Carlos. Leonardo presentará a Rafa, Samuel y Tirso. Las marcas de cada participante son muy parecidas, de forma que el ganador dependerá de cómo se encuentren el día de la competición. Sólo un estudiante del Gaia, Manuel Rico, ganó hace tiempo la prueba individual tres veces consecutivas.

La revista de cada centro anima a sus lectores a asistir a la próxima competición y hace comentarios sobre el futuro utilizando datos del pasado recogidos en las dos gráficas. Los dos centros creen que este año les toca ganar.



## Presentación del trabajo propuesto

La actividad se sitúa en 3º de la E.S.O., en este curso los alumnos ya han tenido un contacto previo con el azar y con la estadística, con las presentaciones elementales de tablas y gráficas y con el análisis de datos.

Se plantea la oportunidad de reflexionar y realizar afirmaciones sobre sucesos aleatorios y la posibilidad de que ocurran teniendo en cuenta datos de resultados previos y abordando la idea de dependencia o independencia de sucesos.

También se aborda la realización de recuentos sistemáticos con la obtención de clasificaciones en una competición deportiva. Se plantea un caso típico en el que importa el orden de clasificación de cada corredor

para llegar fácilmente a la obtención de fórmulas y un caso en el que sólo importa el equipo al que pertenece cada clasificado y no tiene tanto sentido incidir en la obtención de fórmulas.

Se recomienda el uso de diagramas en árbol por su utilidad para analizar las situaciones de recuento en las que hay que tener en cuenta el número de elementos que pueden intervenir, la forma en la que intervienen, el momento en que lo hacen, etc. Además, proporciona modelos de actuación y de razonamiento para otras muchas situaciones y facilita el cálculo de posibilidades, aunque no lleven a la obtención de una fórmula.

Al final, el recuento sistemático de situaciones permite llevar a cabo el cálculo de probabilidades de determinados sucesos utilizando la regla de Laplace.

1. Completa la tabla con el número de veces que ha ganado cada uno de los equipos cada prueba:



	Individual	Equipos
Gaia (G)	16	17
Leonardo (L)	14	13

Como se ha dicho anteriormente, Manuel Rico ganó tres competiciones seguidas. Observando la gráfica adecuada se puede saber con seguridad cuáles fueron dos de los tres años de competición que ganó.

Ganó las competiciones de los años número  y número .

Solución y notas explicativas

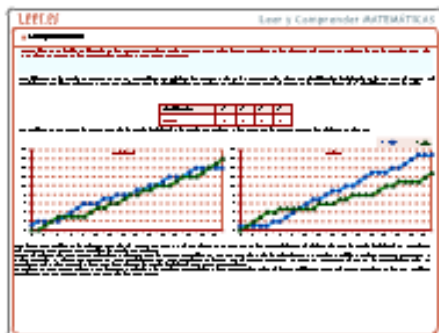
La tabla se puede completar contando sobre las gráficas las veces que gana cada centro, tanto en la competición individual como por equipos. Una forma más directa consiste en tomar el último registro conseguido.

Manuel Rico, del centro Gaia, ganó con seguridad las competiciones que corresponden a los años número 7 y número 8, ya que no hay ningún tramo en el que el centro Gaia ganara tres años consecutivos y sólo hay un tramo en el que ganó cuatro años seguidos (lo que incluye los tres

consecutivos), es decir, del 6 al 9. Manuel pudo ganar los tres primeros años o los tres últimos. Ambos casos contienen los años 7 y 8.

Se pretende que los alumnos interpreten las gráficas del enunciado, las cuales muestran las estadísticas de los resultados de los enfrentamientos deportivos entre los dos equipos, en la prueba individual y en la prueba por equipos.

- 2. Las revistas de los dos centros hacen afirmaciones que deben basarse en datos históricos. Teniendo en cuenta los datos que aportan las gráficas, señala si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:



a) Revista del Gaia: "Ganar o perder es como lanzar una moneda para obtener cara o cruz. Como ya hemos perdido cuatro años consecutivos la prueba individual, y la probabilidad de que salgan 5 cruces seguidas es tan remota, este año vamos a ganar con toda seguridad la prueba individual".

V  F

b) Revista del Gaia: "Vamos a ganar la prueba por equipos porque las estadísticas mandan, y como hemos ganado más del 50% de las veces, nuestra probabilidad de ganar es mayor".

V  F

c) Revista del Leonardo: "Este año seguro que volvemos a ganar la prueba por equipos, ya que, como al final cada equipo ganará la mitad de las ocasiones y hemos ganado menos veces, ganaremos para equilibrar".

V  F

d) Revista del Leonardo: "Queremos ganar la prueba individual para establecer el récord de victorias consecutivas".

V  F

**Solución y notas explicativas**

a) Falso. No se puede decir que se vaya a ganar con seguridad porque se haya perdido cuatro veces consecutivas. Como se afirma en el enunciado, la probabilidad de ganar cada año es la misma para cada equipo. Las marcas son muy parecidas, y ganar depende de cómo estén los corredores el día de la carrera, lo que hace que el hecho de que gane un equipo u otro se pueda comparar con el lanzamiento de una moneda. Si esta situación es equiparable al lanzamiento de monedas, el resultado del 5º lanzamiento no dependerá del resultado del 4º (ni de los anteriores), y la probabilidad de cada resultado es  $\frac{1}{2}$ .

b) Falso, por la misma razón que el apartado anterior.

c) Falso. El razonamiento básico es el mismo que el expuesto anteriormente. Aunque, a la larga, la tendencia es que cada equipo gane el 50% de las veces, no se puede

anticipar el resultado de un año concreto por los resultados anteriores.

d) Cierto. Si ganan establecerán el récord de victorias consecutivas, que serían cinco, ya que hasta ahora sólo se ha ganado cuatro veces de forma consecutiva por parte de cada equipo, el Gaia hace tiempo y el Leonardo en los cuatro últimos años.

Se trata el problema de la dependencia o independencia de sucesos, de si la probabilidad de un suceso depende de lo que ha ocurrido en las experiencias anteriores cuando se trata de sucesos independientes. La discusión en clase es fundamental para abordar situaciones similares que conocen y a las que se aplica el mismo tipo de razonamiento y para asentar correctamente el concepto de experiencia aleatoria.

- **3. Rellena los huecos con los datos que faltan para que las afirmaciones siguientes sean correctas:**  
(Realizar un diagrama en árbol puede ayudar a calcular estos datos).

Leer y Comprender MATEMÁTICAS

Un equipo de seis corredores se enfrenta a una carrera. Los corredores se clasifican en los puestos de la siguiente manera:

Puesto	Nombre
1º	Leonardo
2º	Gaia
3º	Leonardo
4º	Gaia
5º	Gaia
6º	Leonardo

Los nombres de los corredores que llegan a la meta son Gaia y Leonardo. El orden de llegada de los corredores es Gaia, Leonardo, Gaia, Leonardo, Gaia, Leonardo.

Los nombres de los equipos que participan en la carrera son Gaia, Leonardo, Gaia y Leonardo. El orden de llegada de los equipos es Gaia, Leonardo, Gaia, Leonardo.

Los nombres de los equipos que participan en la carrera son Gaia, Leonardo, Gaia y Leonardo. El orden de llegada de los equipos es Gaia, Leonardo, Gaia, Leonardo.



Haz clic para utilizar la calculadora

a) Compiten seis corredores. Si se analizan las posibilidades que hay para cada puesto de la clasificación, la cantidad de clasificaciones posibles con los seis corredores es .

b) Si se elaboraran todas las clasificaciones posibles con los nombres de los cuatro primeros que lleguen a la meta, el número de clasificaciones posibles es .

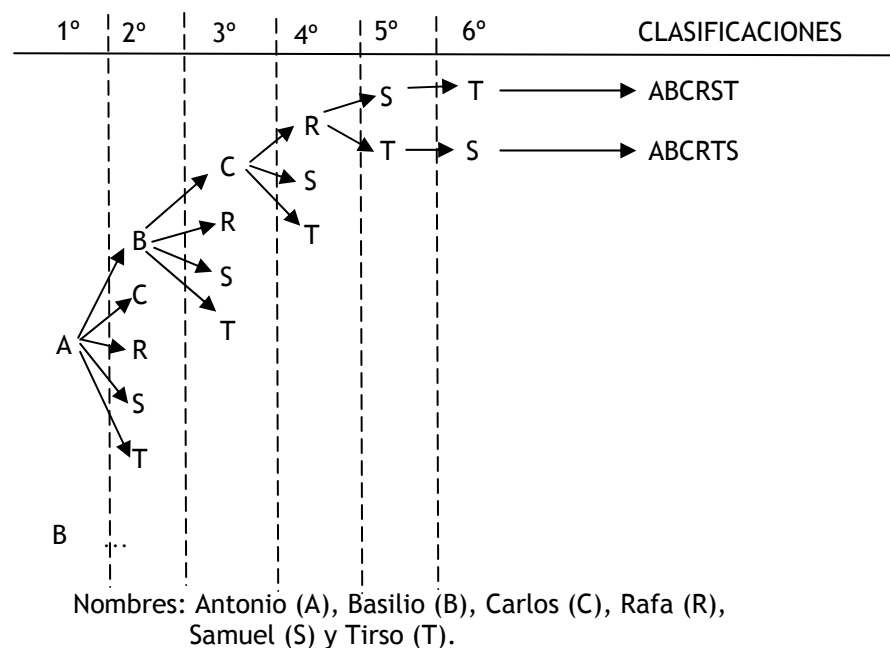
c) Para la puntuación de los equipos sólo se tiene en cuenta de qué equipo es cada clasificado en cada puesto, y no su nombre. GGGL es una de las clasificaciones posibles, significa que en la carrera los tres primeros clasificados son del Gaia y el cuarto del Leonardo. De esta forma, el número de clasificaciones distintas que dan puntuaciones distintas es .

**Solución y notas explicativas**



a) 720. Es fácil resolverlo mediante un diagrama en árbol. Hay que tener en cuenta que en las clasificaciones individuales importa el orden en el que se clasifican los corredores, ya que aparecen sus nombres.

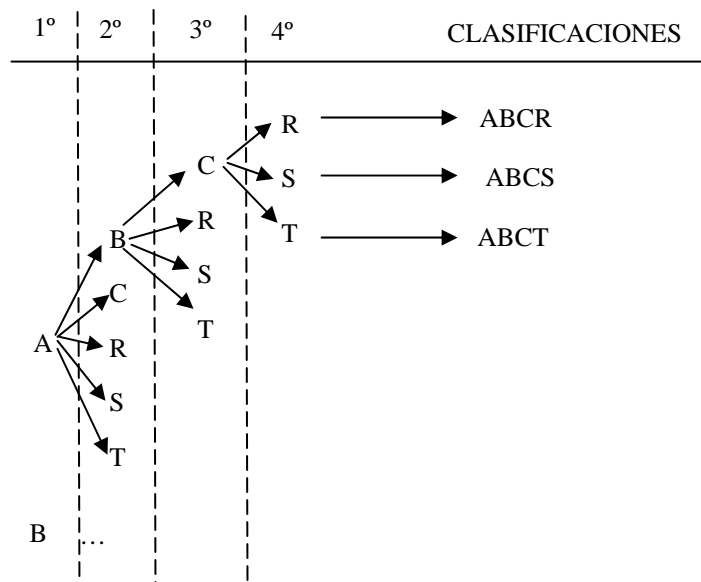
Con el diagrama en árbol se plantea la forma de conseguir todas las clasificaciones posibles: muestra cómo se consigue una parte y permite comprender cómo se obtendría el resto, sin que sea necesario realizarlo con todo detalle:



Si gana uno de ellos, Antonio, por ejemplo, el segundo puesto puede ser ocupado por cualquiera de los demás, por eso se han trazado cinco flechas. Si el segundo es Basilio, el tercero puede ser cualquiera de los cuatro que quedan, por eso se han puesto cuatro flechas. Si el tercero es Carlos, el cuarto puede ser cualquiera de los tres que quedan. Si el cuarto es Rafa, el quinto puede ser Samuel (S) o Tirso (T), y en cada caso, el sexto es el que queda. Así, se obtienen las clasificaciones ABCRST y ABCRTS. Si completamos las demás ramas del árbol, obtendremos las demás clasificaciones mediante ramas semejantes para cada uno de los otros cinco, Basilio, Carlos, Rafa, Samuel o Tirso. El número de clasificaciones que se pueden producir se obtiene multiplicando las posibilidades que aporta cada ramificación. Así, en este caso, sería:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

b) 360. Para obtener las posibles clasificaciones de los cuatro primeros se tiene en cuenta una parte del diagrama en árbol anterior, en el que se llega hasta el cuarto clasificado.



En este caso, la operación a realizar sería:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

c) Si sólo tenemos en cuenta el equipo de cada clasificado, el número de resultados distintos es 14. Se puede ver en la tabla siguiente en la que no aparecen los nombres de los corredores:

Clasificaciones	GGGL	GGLG	GGLL	GLGG	GLGL	GLLG	GLLL
	LGGL	LGGL	LGLG	LGLL	LLGG	LLGL	LLLG

Se ha detallado mucho la solución de cada caso por la importancia que tiene el uso adecuado de diagramas en árbol como modelo de resolución de problemas. La

situación de la competición individual es fácilmente comprensible por los estudiantes, éstos pueden ampliar o reducir el número de corredores y llegar a fórmulas para utilizarlas en situaciones similares.

En el caso de los equipos, distintas clasificaciones individuales tienen como resultado la misma clasificación de equipo, pero el contexto de competición deportiva cercana a la experiencia de los estudiantes facilita su comprensión.

Se pretende que los estudiantes comprendan la importancia de contar bien, y que se aseguren de que se cuentan todos los casos sin que se repita ninguno. Es decir, lo que importa es el método de recuento.

4. Rellena los huecos con los datos que faltan para que las afirmaciones siguientes sean correctas:

**Leer.es** Leer y Comprender MATEMÁTICAS

**Comparticiones**

Con los datos de la tabla, la gráfica de líneas y el gráfico de barras, completa los huecos que faltan en las afirmaciones siguientes. De cada afirmación, el hueco que falta se debe completar con los datos que faltan en la tabla.

Para ganar el partido se necesita un total de 100 puntos. Los equipos A y B juegan el partido por equipos. Para la clasificación por equipos se asignan puntos a los equipos de la siguiente forma:

Equipo	1º	2º	3º	4º
A	3	2	1	0
B	2	1	0	0

Los gráficos de líneas muestran el número de puntos que ha conseguido cada equipo en los minutos de juego. El gráfico de barras muestra el número de puntos que ha conseguido cada equipo en los minutos de juego.

Para hacer una gráfica de líneas se debe representar el tiempo que transcurre en el partido y el número de puntos que ha conseguido cada equipo. El gráfico de barras se debe representar el tiempo que transcurre en el partido y el número de puntos que ha conseguido cada equipo.

Desde el primer minuto de juego se asignan 3 puntos al equipo A y 2 puntos al equipo B. El partido dura 30 minutos. El equipo A consigue 10 puntos y el equipo B consigue 8 puntos. El equipo A consigue 10 puntos y el equipo B consigue 8 puntos. El equipo A consigue 10 puntos y el equipo B consigue 8 puntos.

a) Para la clasificación por equipos, la puntuación máxima que puede conseguir un centro es de

puntos y la mínima de  puntos.

b) Si un equipo ha conseguido 12 puntos, el otro equipo ha conseguido  puntos.

c) Ganar por la mínima diferencia significa que el equipo ganador ha obtenido  puntos y el otro  puntos.

Basta completar la tabla anterior con los puntos que consigue cada centro en la prueba por equipos, en todos los resultados posibles.

Las clasificaciones posibles en las que el primer clasificado es del centro G, y las puntuaciones obtenidas por cada equipo son:

Clasificación	GGGL	GGLG	GGLL	GLGG	GLGL	GLLG	GLLL
Puntos Gaia	16	14	13	12	11	9	8
Puntos Leonardo	1	3	4	5	6	8	9

De la misma forma, las clasificaciones posibles en las que el primer clasificado es del centro L, y las puntuaciones obtenidas por cada equipo componen una tabla simétrica a la anterior:

Clasificación	LGGG	LGGL	LGLG	LGLL	LLGG	LLGL	LLLG
Puntos Gaia	9	8	6	5	4	3	1
Puntos Leonardo	8	9	11	12	13	14	16

La explicación aportada es clarificadora. Es interesante presentar esta información en tablas porque abarcamos todos los casos y es más fácil realizar comparaciones, aunque no es la única manera de orientarlo.

5. Selecciona la opción correcta para que las siguientes afirmaciones sean verdaderas:

**Leer y Comprender MATEMÁTICAS**

**Completación**

Contar bien no es fácil. La historia de las competencias suele contener datos sobre logros deportivos de los alumnos del centro. Se registra lo que ha ocurrido cada año y se tiene en cuenta en los comentarios previos a cada nuevo encuentro.

Nos fijamos en la prueba de carrera de 100 m masculina que celebran los centros Gaia (G) y Leonardo (L). Tiene una clasificación individual, en la que gana el centro del participante que llega primero, y otra por equipos. Para la clasificación por equipos se asignan puntos según el puesto de la carrera hasta el 4º clasificado según la tabla:

Clasificación	1º	2º	3º	4º
Puntos	5	3	2	1

Las gráficas de qué centro ha ganado cada año la prueba individual y la prueba por equipos, y las veces que ha ganado, durante los últimos 30 años son:

Para hacer cada gráfica se ha asignado cada año al centro que gana 1 y al que pierde 0, en cada una de las competiciones. El último año ganó la prueba individual un estudiante del Leonardo. Este centro ganó también la prueba por equipos.

Desde el primer año cada centro selecciona 3 alumnos para la carrera masculina de 100 m. Este año Gaia ha seleccionado a Antonio, Basilio y Carlos. Leonardo presentará a Rafa, Samuel, y Tina. Las marcas de cada participante son muy parecidas, de forma que el ganador dependerá de cómo se encuentren el día de la competición. Sólo un estudiante del Gaia, Manuel Rico, ganó hace tiempo la prueba individual tres veces consecutivas.

La revista de cada centro anima a sus lectores a seguir a la próxima competición y hace comentarios sobre el futuro utilizando datos del pasado recogidos en las dos gráficas anteriores. Los dos centros creen que este año les toca ganar.



a) En la clasificación por equipos, cada clasificación consiste en una secuencia del tipo GGLG. De las distintas clasificaciones posibles, ¿en cuántas gana el centro Gaia (G)?:

b) El número total de clasificaciones distintas posibles en las que los dos primeros clasificados son del Gaia es .

c) Si un equipo ha conseguido 12 puntos, se puede asegurar que ha clasificado a  corredor/es entre los cuatro primeros.

**Solución y notas explicativas**

a) En la clasificación por equipos, el número de clasificaciones posibles distintas en las que gana el centro Gaia (G) es 7.

b) Hay tres clasificaciones en las que los dos primeros clasificados son del Gaia.

c) Si un equipo ha conseguido 12 puntos, se puede afirmar que ha clasificado a tres corredores de entre los cuatro primeros.

Basta observar las dos tablas anteriores para comprobar las afirmaciones que se hacen.

Las tablas son:

Clasificación	GGGL	GGLG	GGLL	GLGG	GLGL	GLLG	GLLL
Puntos Gaia	16	14	13	12	11	9	8
Puntos Leonardo	1	3	4	5	6	8	9

Clasificación	LGGG	LGGL	LGLG	LGLL	LLGG	LLGL	LLLG
Puntos Gaia	9	8	6	5	4	3	1
Puntos Leonardo	8	9	11	12	13	14	16

Gana el centro Gaia cuando obtiene mayor puntuación, esto es, cuando las clasificaciones son: GGGL, GGLG, GGLL, GLGG, GLGL, GLLG y LGGG, siete clasificaciones distintas. Como se puede comprobar, el empate es imposible.

Se trata de analizar con detalle los resultados posibles en la competición por equipos, las puntuaciones que se obtienen en los distintos resultados y el significado que tiene. Por ejemplo, puede ganar el equipo de un centro aunque no haya quedado primero en la prueba individual.



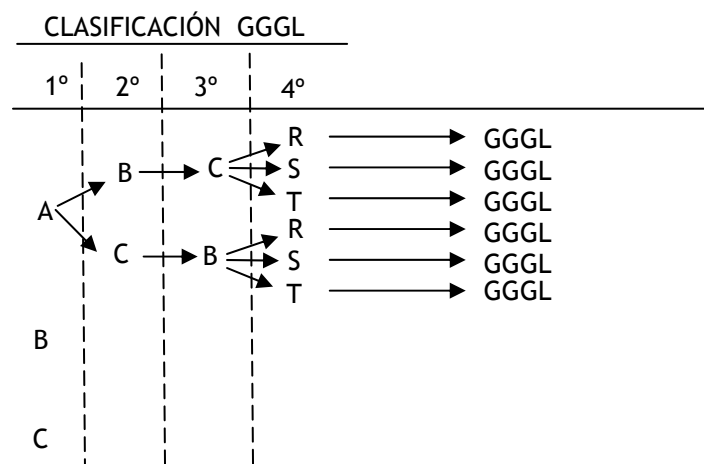
GGGL se obtiene a partir de 18 clasificaciones individuales distintas.

GGLL se obtiene a partir de 36 clasificaciones individuales distintas.

Veamos cada caso:

#### - GGGL

Si se hace el árbol con las ramas de las clasificaciones individuales que dan como resultado GGGL, se saca la conclusión de que los tres primeros son del Gaia y el cuarto del Leonardo.



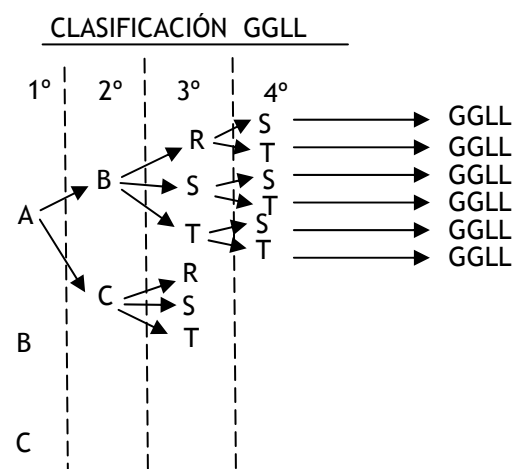
El número de clasificaciones individuales que dan lugar a la clasificación de equipo GGGL es:

$$3 \times 2 \times 1 \times 3 = 18$$

#### - GGLL

GGLL se obtiene de las clasificaciones individuales con los dos primeros clasificados del Gaia y los dos últimos del Leonardo. Si se hace el diagrama en árbol y se sigue el razonamiento que se ha visto antes, la clasificación GGLL se obtiene a partir de las siguientes clasificaciones individuales:

$$3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$$



Usar bien los diagramas en árbol permite analizar y simplificar muchas situaciones.





- a) Verdadero. En el apartado anterior se ha visto que GLL se obtiene de 36 formas distintas, mientras que GGGL se obtiene de 18 formas distintas, justo la mitad.
- b) Verdadero. GGGL y LLLG se obtienen del mismo número de formas distintas: 18.
- c) Falso. Las dos clasificaciones se obtienen del mismo número de formas: 36.

- d) Cierto. El número de formas posibles de obtener GGGL es 18 ( $3 \times 2 \times 1 \times 3$ ), y el número de todas las formas posibles de clasificar a cuatro corredores es 360 ( $6 \times 5 \times 4 \times 3$ ), por lo que la probabilidad de que gane el equipo Gaia con el resultado GGGL es  $18/360 = 1/20$ .

El objetivo de esta pregunta es que los alumnos utilicen la regla de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso en una situación de recuentos sistemáticos.